Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις

Τετάρτη 12-9-2016, 9-12 μ.

1. **(i)** Να εξετασθεί αν οι συναρτήσεις $f_1(x,y) = x^{1/5}y^{10}$ και $f_2(x,y) = x^{10}y^{1/5}$, πληρούν μια συνθήκη Lipschitz στο σύνολο $S := [0,10] \times [-b,b]$ ($b > 0$).

(ii) Να εξετασθούν ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων τα προβλήματα αρχικών τιμών

$$y' = f_1(x,y), \quad y(0) = 0, \qquad\qquad y' = f_2(x,y), \quad y(0) = 0.$$

(iii) Να διατυπωθούν οι προτάσεις που χρησιμοποιήθηκαν στα ερωτήματα (i) και (ii).

Υποδ. Όπως τα Παραδείγματα 2, 7, σελ. 23, 27 (Σύγγραμμα Χ. Φίλου - Δεν απαιτείται το μέγιστο διάστημα ορισμού).

2. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$e^x(y' - y) + y^2 = e^{2x},$$

δεδομένου ότι δέχεται μια λύση της μορφής ke^{mx} (k, m πραγματικές σταθερές). Να εξετασθεί αν υπάρχουν λύσεις y_1, y_2, y_3 με:
(i) $y_1(0) = 1/3$, (ii) $lim_{x\to 5} y_2(x) = \infty$, (iii) $lim_{x\to+\infty} y_3(x) = -\infty$.
Υποδ. Παράδειγμα 2 σελ. 35, (Σύγγραμμα Χ. Φίλου). Οι απαντήσεις στα (i), (ii), (iii) προκύπτουν από τους τύπους των λύσεων (τελευταία γραμμή της σελ. 35).

3. Αν $L(y) = y''' + y'$, να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$L(y)(x) = 2 + sinx, x \geq 0.$$

Ειδικότερα, να βρεθεί η λύση y_0 που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 1, \quad y_0''(0) = -1.$$

Να εξετασθεί αν υπάρχουν (i) ταλαντούμενες λύσεις, (ii) φραγμένες λύσεις, (iii) μη φραγμένες λύσεις των εξισώσεων α) $L(y) = 0$, β) $L(y)(x) = 2 + sinx, x \geq 0$.
Υποδ. Παράδειγμα 4, σελ. 110. Οι απαντήσεις στα (i), (ii), (iii) προκύπτουν από το βασικό σύνολο της ομογενούς και τον τύπο της μερικής λύσης στη σελ. 111 (Σύγγραμμα Χ. Φίλου).

4. Θεωρούμε την γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'''(x) + 6y''(x) + 11y'(x) + 6y(x) = b(x), \quad x \geq 0, \quad (E)$$

όπου b είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[0, +\infty)$.

(i) Αν y_0 είναι η λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 0, \quad y_0''(0) = 1,$$

να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$y(x) = \int_0^x y_0(x-s)b(s)ds, \quad x \geq 0$$

είναι λύση της εξίσωσης (E) που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

(ii) Αν $\int_{2016}^{+\infty} |b(s)|ds < \infty$ να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (E) είναι φραγμένες.

(iii) Να βρεθεί μια ολοκληρωτική έκφραση της (γενικής) λύσης της εξίσωσης (E) για $b(x) = e^{x/2} sin(x^2)$ και να εξετασθεί αν η λύση αυτή είναι φραγμένη.

Υποδ. (i): Άμεσα με παραγώγιση και αντικατάσταση στην εξίσωση. (ii): Από την εύρεση ενός βασικού συνόλου λύσεων (ρίζες χ.π.: -1, -2, -3) προκύπτει ότι όλες οι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης είναι φραγμένες. Επομένως, αν M είναι ένα φράγμα της y_0, τότε

$$|y(x)| \leq M \int_0^{+\infty} |b(s)|ds < \infty, \quad x \geq 0.$$

(iii): $Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) + y(x)$, όπου y η (μερική) λύση του (ii) (Για το φραγμένο δεν απαιτείται η ακριβής εύρεση της y_0!).
Δείτε και την Άσκηση Β-26 σελ. 37 Φυλ. Λυμ Ασκήσεων καθώς και την Άσκηση Β-39 σελ. Β.7 Φυλ. Άλυτων Ασκήσεων (Χ. Φίλου).

5. Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση

$$xy'' + xy' + 2y = 0.$$

(i) Να αποδειχθεί ότι $x_0 = 0$ είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο και να βρεθούν οι ρίζες της ενδεικτικής εξίσωσης.

(ii) Να βρεθεί μια λύση y_1 στο διάστημα $(0, \infty)$ της μορφής

$$y_1(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x > 0.$$

(iii) Με χρήση της μεθόδου του υποβιβασμού της τάξης να βρεθεί μια λύση y_2 γραμμικά ανεξάρτητη με την y_1 (υποθέτουμε ότι $y_1(x) \neq 0, x > 0$).

Υποδ. Άσκηση C-10, σελ. 57, Φυλ. Λυμένων Ασκήσεων Χ. Φίλου.

* [*1,2μ*] είναι y_1, y_2 είναι δύο λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0, \quad x > 0,$$

(k σταθερά) με

$$y_1(1) = 1, \quad y_1'(1) = 0, \qquad y_2(1) = 0, \quad y_2'(1) = 1.$$

α) Να βρεθεί η ορίζουσα Wronski των y_1, y_2, β) Να διατυπωθούν στη γενικότητά τους οι προτάσεις που χρησιμοποιήθηκαν στο ερώτημα α), γ) Να δοθεί μια έκφραση της λύσης y της εξίσωσης που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(1) = 3, y'(1) = 4$.
Υποδ. α), β): Εφαρμογή του τύπου Liouville σελ. 67 (Σύγγραμμα Χ. Φίλου.) γ) προκύπτει άμεσα ως γραμμικός συνδυασμός των (γραμ. ανεξάρτητων) λύσεων y_1, y_2. (Άσκηση 16, σελ. 140, Σύγγραμμα Χ. Φίλου.)